1 Dans tout cet exercice, E est un ensemble fini non vide, de cardinal n, $n \in \mathbb{N}^*$.
On notera $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

A/ On va dénombrer dans cette question, le nombre de partitions de E, constituées uniquement de paires. Ce nombre sera noté a_n.

1/ Calculer directement , a_1, a_2, a_3.

2/ On suppose dorénavant que $n=2m$ est pair.

a/ Combien y a-t-il de paires contenant x_1 ?

b/ En déduire, si $m \geq 2$, une relation de récurrence entre a_n et a_{n-2}.

c/ A partir de la question précédente , montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = \frac{n!}{2^m m!}.$$

Calculer a_4, a_8, a_{16}.

B/ On dispose d'un ensemble de 6 éléments tous distincts: $E=\{x, y, z, t, u, w\}$
On dispose de 6 tiroirs tous distincts.
On place chaque objet au hasard dans un tiroir
Combien y a-t-il de répartitions possibles si:

a/ Tous les tiroirs sont occupés.

b/ Seuls 5 tiroirs sont occupés.

c/ Il y a trois tiroirs occupés avec deux objets dans chacun d'eux.

2 On rappelle que dans un jeu de poker il y a: 4 couleurs qui sont, coeur, carreau, trèfle, pique. Il y a aussi 8 hauteurs, dans l'ordre: 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as.

Le Poker se joue avec un jeu de 32 cartes, on distribue à chaque joueur une "main" de cinq cartes.

1. Dénombrer le nombre de mains possibles.
2. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent :
   (a) un carré d'as (4 as).
   (b) un carré (4 cartes de même hauteur).
   (c) un full (3 cartes de même hauteur et 2 autres cartes de même hauteur).
   (d) un brelan (3 cartes de même hauteur sans full ni carré)
   (e) une quinte flush (5 cartes de hauteur consécutives et de même couleur).
   (f) une couleur (5 cartes de la même couleur sans quinte flush).
   (g) exactement deux rois et trois coeurs.

Homographies conservant U

Notations

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
On introduit les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants :
$U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}=\{e^{i\theta}/\theta\in\mathbb{R}\}$, $P=\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Im}(z)>0\}$ et $D=\{z\in\mathbb{C}/|z|<1\}$.

Définition

Soit $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ tels que $ad-bc\neq 0$.

On appelle homographie définie par la relation $h(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ l'application h à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui à tout $z\in\mathbb{C}$ tels que $cz+d\neq 0$ associe par $\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Partie I - Exemple

Soit h l'homographie définie par $h(z)=i\dfrac{1+z}{1-z}$.

1.a Montrer que $\forall z\in U$ tel que $z\neq 1$, $h(z)\in\mathbb{R}$.

1.b Observer que $\forall z\in D, h(z)\in P$.

2.a Déterminer les complexes z tels que $h(z)=z$.

2.b Pour quel(s) $Z\in\mathbb{C}$ l'équation $h(z)=Z$ d'inconnue $z\neq 1$ possède-t-elle une solution ?

Soit g l'homographie définie par $g(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$.

3.a Montrer que $\forall z\in\mathbb{R}, g(z)\in U$.

3.b Observer que $\forall z\in P, g(z)\in D$.

Partie II - Homographies conservant U

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z)=\dfrac{e^{i\theta}}{z}$.

   Montrer que $\forall z\in U, h(z)\in U$.

2. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $\alpha\notin U$, $\theta\in\mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z)=e^{i\theta}\dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$.

2.a Montrer que h est bien une homographie et que h est définie sur U.

2.b Montrer que $\forall z\in U, h(z)\in U$.

3. Inversement, nous allons démontrer que seules les homographies h précédentes sont telles que $\forall z\in U, h(z)\in U$. Avant cela, nous avons néanmoins besoin de deux résultats techniques :

3.a Etablir que $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}, |\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\beta)$.

3.b Soit $a,b\in\mathbb{C}$. Etablir : $\left(\forall\theta\in\mathbb{R}, a+2\mathrm{Re}(be^{-i\theta})=0\right)\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$.